Funciones de Variable Compleja

MA-2113, Guía #3

Preparado, resuelto y tipeado en LaTeX por Axel Voza

Este es el último tópico del que se ocupa MA-2113: el Análisis y Cálculo con Funciones de Variable Compleja. Los requisitos: todos los previos (funciones, límites, derivadas, integrales —en una variable y, en algunos casos, en dos variables).

Como siempre, los ejercicios marcados con un asterisco son de Exámenes Departamentales y los marcados con dos son opcionales. Las respuestas aparecen, por razones de tiempo, en algunos de los ejercicios y las soluciones detalladas en los casos de ejemplos más importantes.

1. Efectuar las siguientes operaciones con números complejos:

   (a) $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^3$

   (b) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\mathrm{i}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\mathrm{i}}$, para $-1 \leq x \leq 1$

   (c) $(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n$

   (d) $\dfrac{1+\cos\alpha+\mathrm{i}\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha-\mathrm{i}\operatorname{sen}\alpha}$

2. Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, simplificar las expresiones siguientes:

   (a) $(a+\mathrm{i}b)^2 + (a-\mathrm{i}b)^2$

   (b) $(1+\mathrm{i}b)^4 + (1-\mathrm{i}b)^4$

   (c) $\dfrac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d} + \dfrac{a-\mathrm{i}b}{c-\mathrm{i}d}$

   (d) En todos los casos anteriores, explicar por qué las expresiones simplificadas resultan números reales.

3. Hallar y graficar todos los valores de las siguientes raíces:

   (a) $\sqrt[3]{1}$

   (b) $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$

   (c) $\sqrt[4]{-1}$

   (d) $\sqrt[6]{-8}$

   (e) $\sqrt{1-\mathrm{i}}$

   (f) $\sqrt{3+4\mathrm{i}}$

   (g) $\sqrt[3]{-2+2\mathrm{i}}$

   (h) $\sqrt[5]{-4+3\mathrm{i}}$

4. Sean z_1, z_2, z_3 tales que $z_1+z_2+z_3=0$ y $|z_1|=|z_2|=1$. Si $\operatorname{Re}(\overline{z}_1 z_2) = -1/2$,

   (a) demostrar que $|z_3 = 1|$ y

   (b) demostrar que el triángulo de vértices z_i ($i = 1,2,3$) es equilátero.

5. Demostrar las siguientes (des)igualdades, para todos los $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

   (a) $|z|^2 \geq 2\,|\operatorname{Re}(z)|\,|\operatorname{Im}(z)|$

   (b) $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|$

   (c) $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm \operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)$

   (d) $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$ (*identidad del paralelogramo*).

   (e) $\left|\dfrac{z}{|z|} - 1\right| \leq \arg(z)$, si $z \neq 0$.

   (f) $|z-1| \leq ||z|-1| + |z|\,|\arg(z)|$

   (g) $|1-\overline{z}_1 z_2|^2 - |z_1-z_2|^2 = \left(1-|z_1|^2\right)\left(1-|z_2|^2\right)$

   (h) $|z_1+z_2| \geq \dfrac{1}{2}\left(|z_1|+|z_2|\right)\left|\dfrac{z_1}{|z_1|}+\dfrac{z_2}{|z_2|}\right|$

   Solución: Verifiquemos las desigualdades (b) y (f):

   (b) Sea $z = x+\mathrm{i}y$. Entonces $\operatorname{Re}(z) = x$, $\operatorname{Im}(z) = y$ y $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. Así:

   $$\begin{aligned} 0 \leq 2|xy| &\implies x^2+y^2 \leq x^2+2|xy|+y^2 \\ &\implies \sqrt{x^2+y^2} \leq (|x|+|y|) \\ &\overset{(I)}{\implies} |z| \leq |\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Im}(z)|. \end{aligned}$$

   Además, a partir de la desigualdad notable $(|x|+|y|)^2 \geq 0$, tenemos:

   $$\begin{aligned} 2|xy| \leq x^2+y^2 &\implies x^2+2|xy|+y^2 \leq 2\left(x^2+y^2\right) \\ &\implies (|x|+|y|)^2 \leq 2\left(x^2+y^2\right) \\ &\implies |x|+|y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \\ &\overset{(II)}{\implies} |\operatorname{Re}(z)|+|\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|. \end{aligned}$$

   Juntando las desigualdades (I) y (II) se obtiene el resultado deseado.

(f) En este caso, representamos z en coordenadas polares, por lo que sean $\theta \in [-\pi, \pi)$ y $\rho \in \mathbb{R}^+$. Entonces

$$\begin{aligned} ||z|-1| &= |\rho\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta - 1| \\ &\overset{(a)}{\leq} |\rho\cos\theta - 1| + |\mathrm{i}\rho\operatorname{sen}\theta| \\ &\overset{(b)}{\leq} |\rho|\cos\theta| - 1| + \rho\,|\operatorname{sen}\theta| \\ &\overset{(c)}{\leq} |\rho - 1| + \rho|\theta| \\ &= ||z|-1| + |z|\,|\arg(z)|\,, \end{aligned}$$

donde en (a) se usa la desigualdad triangular, en (b) la desigualdad $k \leq |k|$ para $x \in \mathbb{R}$ (en particular, para $k = \cos\theta$) y la propiedad del módulo de un producto, y en (c) el hecho de que $|\operatorname{sen}\theta| \leq |\theta|$, para todo $\theta \in [-\pi, \pi)$ (haga un gráfico para convencerse de ésto).

6. **Sean $z, z' \in \mathbb{C}$ tales que $\overline{z}z' \neq 1$. Demostrar que

$$\left|\frac{z - z'}{1 - \overline{z}z'}\right| < 1 \quad \text{si} \quad |z| < 1 \ \text{ y } |z'| < 1$$
$$\left|\frac{z - z'}{1 - \overline{z}z'}\right| = 1 \quad \text{si} \quad |z| = 1 \ \text{ ó } \ |z'| < 1\ .$$

7. Demostrar que $\left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^3 = 1$ y $\left(\frac{\pm 1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^6 = 1$, para todas las combinaciones de signos posibles (*Sugerencia*: en ambos casos, averigüe si los números son las raíces de cierto polinomio con coeficientes reales).

8. Resolver la ecuación $\overline{z} = z^{n-1}$, donde $n \neq 2$ es un número natural.

9. Demostrar que las siguientes divisiones son exactas:

   (a) $\dfrac{(\cos\alpha + x\operatorname{sen}\alpha)^n - \cos n\alpha - x\operatorname{sen} n\alpha}{x^2 + 1}$

   (b) $\dfrac{x^n\operatorname{sen}\alpha - \lambda^{n-1}x\operatorname{sen} n\alpha + \lambda^n\operatorname{sen}(n-1)\alpha}{x^2 - 2\lambda x\cos\alpha + \lambda^2}$

   (*Sugerencia*: usar en ambos casos la fórmula de De Môivre y notar $x_{1,2} = \pm\mathrm{i}$ y $x_{1,2} = \lambda\operatorname{cis}\alpha$ son las raíces de los denominadores).

10. Demostrar el

Teorema 3.1. [Kakeya] Sea $P(z)$ un polinomio con coeficientes reales de la forma

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\ ,$$

tal que $a_0 > a_1 > \cdots > a_n > 0$. Entonces todas las raíces de $P(z)$ satisfacen $|z| > 1$.

(*Sugerencia*: usar la desigualdad triangular sobre el polinomio $(1 - z)P(z)$).

11. Sean $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ números complejos tales que los a_i's son distintos entre sí. Demostrar que existe un único polinomio $P(z)$ tal que $P(a_i) = b_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$ (*Sugerencia*: usar el determinante de Vandermonde visto en MA-1116).

12. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha^n = 1$ y $\alpha \neq 1$.

    (a) Demostrar que $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1} = 0$.

    (b) Como $\alpha = \alpha_0$ es una raíz n-ésima de la unidad, si $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ son **todas** las raíces de $z^n = 1$, demostrar que $\alpha_0^k = \alpha_k$ si $k = 0, 1, \ldots, n-1$, y como $\alpha_0^n = 1$, deducir de la parte anterior que $1 + \alpha + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} = 0$.

    (c) Demostrar que $\overline{\alpha}_k = \alpha_{n-k}$, $\forall\, k = 0, 1, \ldots, n-1$, y deducir de las partes anteriores que los puntos α_k son los vértices de un pentágono regular de n lados en el plano complejo.

13. Hallar los vértices de un polígono regular de n lados, si su centro se encuentra en $z = 0$ y uno de sus vértices $z = \alpha$ es conocido.

14. Sean z_1, z_2 dos vértices adyacentes de un polígono regular de n lados. Hallar el vértice $z_3 \neq z_1$ adyacente a z_2.

15. Un punto variable en $\mathbb{R}^2$ tiene como coordenadas $(2x + 3y - 1, 2y - 3x + 5)$. Si se convierte este plano en el plano complejo, hallar $a, b \in \mathbb{C}$ de modo que dicho punto se pueda representar como $az + b$.

16. En este ejercicio se estudia el número $\mathrm{j} = \dfrac{-1 + \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

    (a) Obtener relaciones sencillas entre 1, j, j^2, $\bar{\mathrm{j}}$ y $1/\mathrm{j}$, usando el hecho de que j es raíz cúbica de la unidad.

    (b) Al igual que ya se habrá hecho con las potencia de i, determinar las potencias j^n según sea n un múltiplo de 3, etc.

    (c) La identidad $a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$ tenía sentido cuando la factorización tenía lugar en $\mathbb{R}$. Demostrar que j mejora esta identidad en el caso complejo, demostrando que

$$a^3 + b^3 = (a + b)\left(a\mathrm{j} + b\mathrm{j}^2\right)\left(a\mathrm{j}^2 + b\mathrm{j}\right)\ .$$

(d) Sea $P(x) = (1 + x + x^2)^n$. Llamemos S_0 (respectivamente S_1 o S_2) a la suma de los coeficientes de P cuya potencia de x es múltiplo de 3 (respectivamente, múltiplo de 3 más 1 o múltiplo de 3 más 2). Sustituyendo x por cada una de las raíces $1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2$ de la unidad, demostrar que $S_0 = S_1 = S_2 = 3^{n-1}$.

(e) Demostrar que todo número complejo $z = x + \mathrm{i}y$ se puede escribir en la forma $z = \alpha + \mathrm{j}\beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Deducir que si $z = 0$, entonces $\alpha = \beta = 0$.

(f) Si $z = x + \mathrm{j}y$ y $z' = x' + \mathrm{j}y'$, las operaciones de suma, producto y cociente se efectúan en la forma

$$\begin{aligned} z + z' &= x + x' + \mathrm{j}(y + y') \ , \\ zz' &= xx' - yy' + \mathrm{j}(xy' + x'y - yy') \ , \\ \frac{1}{z} &= \frac{x - y}{x^2 + y^2 - xy} + \mathrm{j}\frac{-y}{x^2 + y^2 - xy} \ . \end{aligned}$$

¿Qué significado algebráico tiene el denominador $x^2 + y^2 - xy$ en el último caso?

17. Demostrar que $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que la recta $\ell = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0 \}$ se puede escribir en el plano complejo como $\ell = \{ z \in \mathbb{C} \mid \overline{\alpha} z + \alpha\overline{z} + c = 0 \}$.

18. Hallar gráficamente la curva ω determinada por:

(a) $\omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 1/4 \}$
(b) $\omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z^2) = 2 \}$
(c) $\omega = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\left(\overline{z^2 - \overline{z}}\right) = 2 - \operatorname{Im}(z) \right\}$
(d) $\omega = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z^2 + (\overline{z})^2 = 1 \right\}$
(e) $\omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| - 3\operatorname{Im}(z) = 6 \}$
(f) $\omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid 3|z| - \operatorname{Re}(z) = 12 \}$
(g) $\omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid 2z\overline{z} + (2 + \mathrm{i})z + (2 - \mathrm{i})\overline{z} = 2 \}$
(h) $\omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(1 + z) = |z| \}$
(i) $\omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid \arg(z - 1) = \pi/2 \}$
(j) $\omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = |1 - 2\overline{z}| \}$
(k) $\omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z + \mathrm{i}| + |z - \mathrm{i}| = 4 \}$

Solución: Resolveremos el (d) y el (h):

(d) En primer lugar, si $z = x + \mathrm{i}y$, calculemos z^2 y $(\overline{z})^2$:

$$\begin{aligned} z^2 &= (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 \ ; \\ (\overline{z})^2 &= (x - \mathrm{i}y)^2 = x^2 - 2\mathrm{i}xy - y^2 \ , \end{aligned}$$

de modo que $z^2 + (\overline{z})^2 = 1$ se convierte en $2x^2 - 2y^2 = 1$, es decir, la hipérbola $x^2 - y^2 = 1/2$, como se muestra en la Figura 1(a).

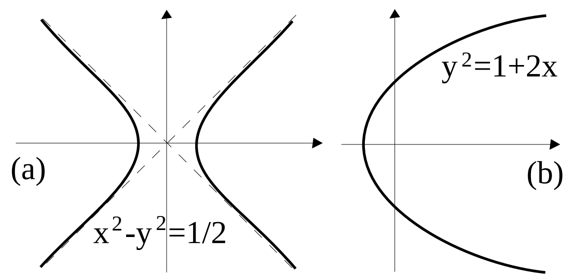

Figura 1. Gráficos de (a) $z^2 + (\overline{z})^2 = 1$ y de (b) $\operatorname{Re}(1 + z) = |z|$.

(h) Es claro que $\operatorname{Re}(1 + x + \mathrm{i}y) = 1 + x$, de modo que $\operatorname{Re}(1 + z) = |z|$ queda como $1 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$, es decir, $1 + 2x + x^2 = x^2 + y^2$, que representa la parábola de eje horizontal $y^2 = 1 + 2x$, mostrada en la Figura 1(b).

19. Hallar gráficamente la región Ω determinada por:

(a) $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z^2) > 2 \}$
(b) $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 \leq \arg(z + 1 - \mathrm{i}) \leq 3\pi/4 \}$
(c) $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| + \operatorname{Re}(z) < 1 \}$
(d) $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2) > 0 \}$
(e) $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(1/z) < 0 \ , \ |1/z| > 1 \}$
(f) $\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \leq 1 \right\}$
(g) $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z + 2 + \mathrm{i}| \leq 2 \}$
(h) $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < |1 - a\overline{z}| \}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$
(i) $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2 + \operatorname{Im}(z) \}$
(j) $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid 1/4 < \operatorname{Re}(1/z) + \operatorname{Im}(1/z) < 1/2 \}$
(k) $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid |2z| > |1 + z^2| \}$
(l) $\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\left(\dfrac{z-1}{z+2}\right) \leq 0 \right\}$

Solución: Veamos el (e) y el (k):

(e) Si $z = x + \mathrm{i}y$, sabemos que

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} \ ,$$

por lo que $\operatorname{Im}(1/z) = -y/\left(x^2 + y^2\right)$. Así, la primera condición de los puntos de Ω requiere que $-y < 0$ (ya que $x^2 + y^2 \geq 0$), es decir, $y > 0$. Pero la segunda dice que $|1/z| = 1/|z| > 1$, o sea, $x^2 + y^2 < 1$. Resumiendo, se trata de la semicircunferencia unitaria (por ser $x^2 + y^2 < 1$) del semiplano superior (por ser $y > 0$), como se muestra en la Figura 2(a), cuya región sombreada representa a Ω.

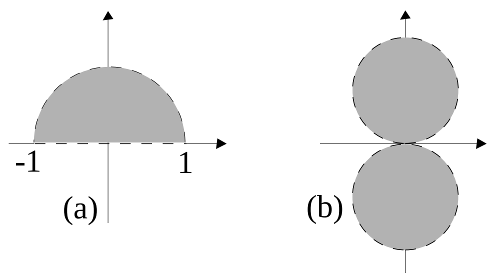

Figura 2. Gráficos de (a) $\mathrm{Im}(1/z) < 0$, $|1/z| > 1$ y de (b) $|2z| > |1 + z^2|$.

(k) En este caso tenemos que los puntos de Ω satisfacen $2\sqrt{x^2+y^2} > \sqrt{(1+x^2-y^2)^2 + (2xy)^2}$. Elevando al cuadrado y simplificando, tenemos:

$$\begin{aligned}
4\left(x^2+y^2\right) &> 1 + 2x^2 - 2y^2 + x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 \\
4\left(x^2+y^2\right) &> 1 + 2x^2 + 2y^2 - 4y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \\
4\left(x^2+y^2\right) &> 1 + 2\left(x^2+y^2\right) + \left(x^2+y^2\right)^2 - 4y^2 \\
0 &> 1 - 2\left(x^2+y^2\right) + \left(x^2+y^2\right)^2 - 4y^2 \\
0 &> \left(x^2+y^2-1\right)^2 - 4y^2 \\
0 &> \left(x^2+y^2-1-2y\right)\left(x^2+y^2-1+2y\right) ,
\end{aligned}$$

y estos puntos satisfacen, o bien la condición

$$(I) : \left\{ \begin{array}{lcl} x^2+y^2-2y-1 & < & 0 \\ x^2+y^2+2y-1 & > & 0 \end{array} \right. ,$$

o bien la condición

$$(II) : \left\{ \begin{array}{lcl} x^2+y^2-2y-1 & > & 0 \\ x^2+y^2+2y-1 & < & 0 \end{array} \right. ,$$

La condición (I) dice $x + \mathrm{i}y$ se encuentra **dentro** de la circunferencia $x^2 + (y-1)^2 = 2$ y **fuera** de $x^2 + (y+1)^2 = 2$, mientras que la (II) es análoga, pero intercambiando "**dentro**" y "**fuera**". Así, y como estas dos condiciones pueden ocurrir independientemente, los puntos $z = x + \mathrm{i}y$ yacen en la unión de estas dos regiones, lo que aparenta la región interior a un "ocho", como lo muestra la zona rayada de la Figura 2(b).

20. Sean Ω_1 el conjunto de puntos con argumento $\pi/3$ y Ω_2 el de puntos con radio 3.

    (a) Analizar qué es gráficamente el conjunto $4\Omega_1$ y $4\Omega_2$, es decir, dibujar los puntos $4z_1$ y $4z_2$, con $z_1 \in \Omega_1$ y $z_2 \in \Omega_2$.

    (b) Repetir la pregunta anterior reemplazando el "4" por $(1+\mathrm{i})/\sqrt{2}$.

    (c) Las dos partes anteriores sugieren una generalización: demostrar la siguiente

    Proposición 3.1. Sean $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definidas como

    $$w = f(z) = az \ , \ \ w = g(z) = (\operatorname{cis}\theta)z \ ,$$

    con $a \in \mathbb{R}$ y $\theta \in [0, 2\pi)$. Entonces $w_0 = f(z_0)$ es un punto en la misma dirección que z_0, pero a veces más largo (resp. corto) que z_0 si $|a| > 1$ (resp. si $|a| < 1$), y $w_0 = g(z_0)$ es un punto de módulo igual a z_0, pero rotado con respecto al origen θ radianes.

    A f se le llama, claro está, una *homotecia*, y a g una *rotación*.

    (d) Si Ω_1 y Ω_2 son como en (a), graficar $(3-3\mathrm{i})\Omega_1$ y $(-2+2\sqrt{3}\mathrm{i})\Omega_2$.

21. Hallar los valores de $a, b \in \mathbb{C}$ de modo que la función lineal compleja $w = f(z) = az + b$ mapee $f(\Omega_1) = \Omega_2$ en cada uno de los siguientes casos:

    (a) $\Omega_1 =$ semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$;
    $\Omega_2 =$ semiplano $\mathrm{Re}(w) - \mathrm{Im}(w) > 1$

    (b) $\Omega_1 =$ disco de centro $z = 2 - \mathrm{i}$ y radio 4;
    $\Omega_2 =$ disco de centro $w = -1 + \mathrm{i}$ y radio 3.

    (c) $\Omega_1 =$ semiplano $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \geq 1$;
    $\Omega_2 =$ semiplano $\mathrm{Im}(w) \geq 0$.

    (d) $\Omega_1 =$ disco de centro $z = 1 - \mathrm{i}$ y radio 1;
    $\Omega_2 =$ disco de centro $w = -1 + \mathrm{i}$ y radio $\sqrt{2}$.

22. Dada la función $w = 1/z$, llamada *inversión*, hallar las imágenes de las siguientes curvas y regiones:

    (a) la familia de circunferencias $|z|^2 = a\,\mathrm{Re}(z)$;

    (b) la familia de circunferencias $|z|^2 = b\,\mathrm{Im}(z)$;

    (c) el haz de rectas $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z) + b$;

    (d) el haz de rectas $\mathrm{Im}(z) = k\,\mathrm{Re}(z)$;

    (e) el haz de rectas que pasan por un punto fijo $z_0 \neq 0$;

    (f) la parábola $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}^2(z)$;

(g) el círculo $|z-1| \leq 1$, $z \neq 0$;

(h) el sector $\pi/6 \leq \arg(z) \leq \pi/3$, $0 < |z| \leq R < 1$.

23. Esta pregunta estudia las *transformaciones de Möebius* o *transformaciones fraccionarias lineales*

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \ .$$

(a) Demostrar que $w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, con $ad - bc \neq 0$, es composición de traslaciones, rotaciones u homotecias e inversiones (*Sugerencia*: usar la identidad

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{-(ad-bc)/c}{cz+d} \ ).$$

(b) Verificar para la función de la parte anterior que

i. si $a = 0$, f es una traslación, una inversión y una homotecia o rotación;

ii. si $c = 0$, f es sólo una traslación y una homotecia o rotación;

iii. si $a = d = 0$, f es sólo una inversión y una homotecia o rotación; y

iv. si $b = c = 0$, f es sólo una homotecia o rotación.

(c) Hallar $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ de modo que la función fraccional lineal $w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ mapee $f(\Omega_1) = \Omega_2$ en cada uno de los siguientes casos:

i. $\Omega_1 =$ semiplano $\mathrm{Re}(z) \geq 3$;
$\Omega_2 =$ disco $|w| \leq 1$.

ii. $\Omega_1 =$ disco $|z - 3\mathrm{i}| < 1$;
$\Omega_2 =$ semiplano $\mathrm{Im}(w) < 0$.

(d) Si f es como en (a), pero con la condición $ad - bc > 0$ y $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, demostrar que f conserva el semiplano superior, es decir, que f mapea todo punto z con $\mathrm{Im}(z) > 0$ en otro w con $\mathrm{Im}(w) > 0$.

24. Dada la transformación $w = f(z) = z^2$,

(a) Hallar las imágenes de los conjuntos

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{ \ z \in \mathbb{C} \mid \ \mathrm{Re}(z) = a \ \} \ , \\
\Omega_2 &= \{ \ z \in \mathbb{C} \mid \ \mathrm{Im}(z) = b \ \} \ , \\
\Omega_3 &= \{ \ z \in \mathbb{C} \mid |z| = r \ \} \ , \\
\Omega_4 &= \{ \ z \in \mathbb{C} \mid \ \arg(z) = \alpha \ \} \ ,
\end{aligned}$$

Analizar en cada conjunto $f(\Omega_i)$ todos los casos posibles, con la única restricción $a, b \in \mathbb{R}$, $r > 0$ y $\alpha \in [0, 2\pi)$.

(b) Concluír la veracidad de los gráficos dados en la Figura 3. Demostrar que f mapea el cuadrilátero hiperbólico formado por dos miembros de la familia $xy = K$ y dos de la familia $x^2 - y^2 = K'$ en un cuadrado (en cierta forma, los lados del cuadrilátero inicial tienen "la mitad" de la curvatura que tienen los lados del cuadrilátero final). Demostrar también que f "duplica" una región, en el sentido que convierte un cuarto de círculo unitario en la mitad.

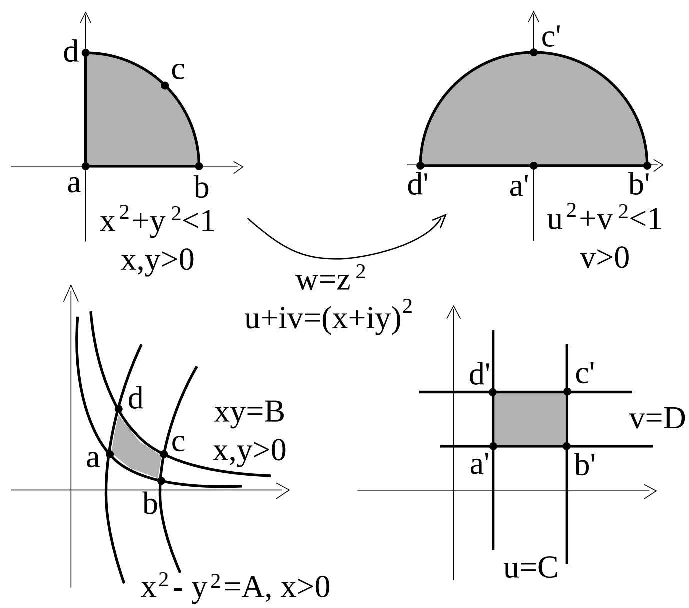

Figura 3. Gráficos del ejercicio § 24b. En cada caso, los puntos con primas corresponden a transformados por la función (por ejemplo, $f(a) = a'$, etc.)

(c) Si $\Omega_1 = \{ \ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \ , \ \mathrm{Re}(z) \geq 0 \ \}$ y $\Omega_1 = \{ \ w \in \mathbb{C} \mid \ \mathrm{Re}(w) + \mathrm{Im}(w) \geq 0 \ \}$, hallar una función $w = f(z)$ de modo que $f(\Omega_1) = \Omega_2$.

25. Hallar la imagen de la circunferencia

$$\Omega = \{ \ R \,\mathrm{cis}(t) \mid 0 \leq t < \pi \ \}$$

bajo la función $f(z) = z/\overline{z}$.

26. Hallar la imagen de la circunferencia unitaria centrada en el origen bajo la función $w = \mathrm{i}\dfrac{1+z}{1-z}$.

27. Hallar la imagen de las circunferencias $|z| = 1$ y $|z| = 2$ bajo la transformación $w = f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

28. La función *exponencial compleja* y sus extensiones.[1] Suponiendo válido el manejo formal de series reales para cualquier variable, usar las series de e^x, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ y sustituír x por it; el resultado al que se llegará sugiere una definición razonable

Definición 3.1. Para $t \in \mathbb{R}$, se tiene $e^{it} := \cos t + i \operatorname{sen} t$, de modo que para cualquier $z = x + iy$ se tiene

$$e^z = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) \ .$$

Sus partes par e impar, es decir, las funciones hiperbólicas se definen análogamente al caso real.

29. Usando la definición anterior, demostrar las siguientes propiedades:

(a) $e^{z+w} = e^z \iff w = 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$, $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$.

(c) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

(d) $\operatorname{sen} iz = i \operatorname{senh} z$, $\cos iz = \cosh z$.

(e) Todas las identidades trigonométricas e hiperbólicas que eran válidas en el caso real.

30. Deducir que esta definición de exponencial compleja permite representar, de manera no única claro, todo número en el plano, por medio de la relación $z = \rho\, e^{i\theta}$, donde

$$\rho = |z| \ \text{ y } \ \theta = \arg(z) \in [-\pi, \pi) \ .$$

Verificar que la determinación de θ se puede hacer por medio de

$$\theta = \begin{cases} \arctan(y/x) & , \ x > 0 \\ \pi + \arctan(y/x) & , \ x < 0 \ , \ y \geq 0 \\ -\pi + \arctan(y/x) & , \ x < 0 \ , \ y < 0 \\ \pi/2 & , \ x = 0 \ , \ y > 0 \\ -\pi/2 & , \ x = 0 \ , \ y < 0 \end{cases}$$

31. Sean u, v conocidos. Hallar, usando sistemas (lamentablemente no lineales) de ecuaciones, los valores de x, y de modo que $e^{x+iy} = u + iv$.

32. Como sugiere el ejercicio anterior, tenemos

Definición 3.2. Si $z = x + iy$ son arbitrarios, todos los $w = u + iv \in \mathbb{C}$ que permiten obtener $e^w = z$ están dados por

$$\operatorname{Lgn} z := \operatorname{lgn} |z| + i\,(\arg z + 2k\pi) \ , \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

Esto dá lugar a la función *logarítmica compleja* $f(z) = \operatorname{lgn}_k z = \operatorname{lgn} |z| + i\,(\arg z + 2k\pi)$, donde k denota la *rama del logaritmo*[2] Para $k = 0$ se obtiene la *rama principal* del lagaritmo, denotada $\operatorname{lgn} z$.

Lógicamente, el resto de las funciones trascendentes se definen por medio del logaritmo, de la siguientes forma:

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Lgn} z} \ , \quad a^z = e^{z \operatorname{Lgn} a} \ , \quad \alpha, a \in \mathbb{C} \ .$$

Usando estas definiciones (y las de los ejercicios anteriores si hace falta), hallar todos los posibles valores de los siguientes números complejos:

(a) $\cos(2 + i)$

(b) $\tan(2 - i)$

(c) $\tanh(\operatorname{lgn} 3 + i\pi/4)$

(d) $\operatorname{Lgn} 4$

(e) $\operatorname{Lgn} \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

(f) $\operatorname{Lgn}(2 - 3i)$

(g) $(-2)^{\sqrt{2}}$

(h) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$

(i) $i^i - i^{-i}$

(j) $(-3 + 4i)^{1+i}$

Solución: Miremos cómo proceder con los ejercicios (e) y (g).

(e) En primer lugar, como 4 es real positivo, se tiene $|z| = 4$ y $\arg(z) = 0$. Así, todos los valores de $\operatorname{Lgn} 4$ vienen dados por

$$\operatorname{Lgn} 4 = \operatorname{lgn} |4| + i\,(\arg(4) + 2k\pi) = 2\,(\operatorname{lgn} 2 + k\pi i) \ .$$

(g) Escribimos $(-2)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \operatorname{Lgn}(-2)}$, y el ejercicio se reduce a hallar todos los valores de $\operatorname{Lgn}(-2)$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \operatorname{Lgn}(-2) &= \operatorname{lgn} |-2| + i\,(\arg(-2) + 2k\pi) \\ &= \operatorname{lgn} 2 + i\,(-\pi + 2k\pi) \\ &= \operatorname{lgn} 2 + (2k-1) i\pi \\ e^{\sqrt{2} \operatorname{Lgn}(-2)} &= e^{\sqrt{2}(\operatorname{lgn} 2 + (2k-1) i\pi)} \\ &= e^{\sqrt{2} \operatorname{lgn} 2}\, e^{\sqrt{2}(2k-1) i\pi} \\ &= 2^{\sqrt{2}} \operatorname{cis}\left[\sqrt{2}\,(2k-1)\, i\pi\right] \ , \end{aligned}$$

donde $k \in \mathbb{Z}$.

[1] A partir de este ejericio, y hasta el § 38, se exponen herramientas teóricas **imprescindibles** para continuar el resto de esta guía y las siguientes; se recomienda hacerlos en este mismo orden.

[2] La "función" $\operatorname{Lgn} z$ definida antes **no asigna un solo valor** de v, por lo que ella no puede ser función; en algunos textos, a este logaritmo y a todas sus extensiones se les llama *funciones multiformes*.

33. La rama principal del logaritmo tendrá, en la parte de funciones analíticas, una utilidad enorme para ejemplificar funciones que no serán de ese tipo. La estudiaremos por un rato.

    (a) Explicar la falla en el siguiente razonamiento, conocido como la *paradoja de Bernoulli*: como $(-z)^2 = z^2$, entonces $\operatorname{lgn}(-z)^2 = \operatorname{lgn} z^2$, es decir, $2\operatorname{lgn}(-z) = 2\operatorname{lgn} z$, o sea, $\operatorname{lgn}(-z) = \operatorname{lgn} z$.

    (b) Calcular $\operatorname{lgn}(-1+\mathrm{i})$ y $\operatorname{lgn}\mathrm{i}$ por separado y sumar estos resultados; luego, notando que $\mathrm{i}(-1+\mathrm{i}) = -1-\mathrm{i}$, calcular $\operatorname{lgn}(-1-\mathrm{i})$. ¿Por qué ambos resultados son distintos?

    (c) Si denotamos como w, w' los (distintos) resultados de la parte anterior, verificar que $w - w' = 2\pi\mathrm{i}$.

    (d) El hecho verificado en la parte anterior no es casual; demostrar que la manera de aplicar el logaritmo a un producto es

    $$\operatorname{lgn}(zz') = \operatorname{lgn}|z| + \operatorname{lgn}|z'| + \mathrm{i}\phi(\theta,\theta') \ ,$$

    donde $\phi(\theta,\theta')$ se halla como sigue: dividir $\theta+\theta'$ entre 2π y tomar ϕ como el resto de esta división.

    (e) Enunciar y demostrar propiedades análogas a la anterior para "corregir" las identidades $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$ y $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta$, cuando $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

34. Determinar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones

    (a) $\mathrm{e}^z + \mathrm{i} = 0$
    (b) $4\cos z + 5 = 0$
    (c) $\cos z = \cosh z$
    (d) $\operatorname{sen} z = \mathrm{i}\pi$
    (e) $\cos z = \mathrm{i}\operatorname{senh} 2z$
    (f) $\mathrm{e}^{iz} = \cos \pi x$
    (g) $\mathrm{e}^{2z} + 2\,\mathrm{e}^z = 3$
    (h) $\cosh z = \mathrm{i}$
    (i) $\operatorname{lgn}(z+\mathrm{i}) = 0$
    (j) $\operatorname{lgn}(\mathrm{i}-z) = 1$

35. Usando el hecho de que $\sqrt{z}$ tiene dos determinaciones (es decir, es una función biforme), demostrar rigurosamente que para todo $z = x + \mathrm{i}y$ se tiene

    $$\sqrt{z} = \pm\left[\sqrt{\frac{|z|+x}{2}} + \mathrm{i}(\operatorname{sgn} y)\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\right]$$

36. Tomando en consideración los dos valores que toma la raíz compleja, demostrar las siguientes fórmulas para funciones inversas (claramente biformes) e indicar sus dominios de validez:

    (a) $\arccos z = -\mathrm{i}\operatorname{lgn}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$

    (b) $\operatorname{arcsen} z = -\mathrm{i}\operatorname{lgn}\left(\mathrm{i}z + \sqrt{1-z^2}\right)$

    (c) $\arctan z = \dfrac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{lgn}\dfrac{\mathrm{i}+z}{\mathrm{i}-z} = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\operatorname{lgn}\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$

    (d) $\operatorname{arg\,cosh} z = \operatorname{lgn}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$

    (e) $\operatorname{arg\,senh} z = \operatorname{lgn}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$

    (f) $\operatorname{arg\,tanh} z = \dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}\dfrac{1+z}{1-z}$

37. Verificar los siguientes cálculos:

    (a) $\operatorname{arcsen} 3 = (2k+1/2)\pi - \mathrm{i}\operatorname{lgn}\left(3 \pm \sqrt{8}\right)$.

    (b) $\operatorname{arg\,tanh}(1-\mathrm{i}) = \frac{1}{4}\operatorname{lgn} 5 + \left(\frac{1}{2}\arctan 2 + (k+\frac{1}{2})\pi\right)\mathrm{i}$.

    (c) $\arctan(1+2\mathrm{i}) = \frac{1}{2}\left(\arctan\frac{1}{2} + (2k+1)\pi\right) + \frac{\mathrm{i}}{4}\operatorname{lgn} 5$.

    (d) $\operatorname{arg\,cosh} 2\mathrm{i} = \operatorname{lgn}\left(\sqrt{5} \pm 2\right) + (2k \pm 1/2)\pi\mathrm{i}$.

38. Sea $w = f(z) = \mathrm{e}^z$.

    (a) Calcular la imágen por f del conjunto de puntos sobre la recta $k\pi\mathrm{i}$, donde $k \in \mathbb{Z}$.

    (b) Calcular la imágen por f del conjunto de puntos sobre la recta $x_0 \in \mathbb{R}$.

    (c) Usar las partes anteriores para comprobar que mapea cualquier rectángulo $[a,b]\times[\theta_1,\theta_2]$ en un sector anular de radios mínimo e^a y máximo e^b y ángulo $\theta_2-\theta_1$ (siempre y cuando $\theta_2-\theta_1 < 2\pi$) y, en general, cualquier banda (infinita) de longitud π en todo el semiplano superior.

39. Repetir la pregunta anterior (junto con algún estudio adicional, si es necesario) para elbaorar el dibujo de algunos mapeos de la función $w = f(z) = \operatorname{sen} z$.

Respuestas a algunos de los ejercicios

1. (a) -8; (b) $x^2 + \sqrt{1-x^4}\mathrm{i}$; (c) $2^{n/2+1}\cos(n\pi/4)$; (d) $\operatorname{cis}\alpha$.

2. (a) $2\left(a^2-b^2\right)$; (b) $2-12a^2+a^4$; (d) $2\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}$; (d) Como todas las letras representan números reales, cada una de estas expresiones es real por verse como la suma de dos complejos conjugados.

3. (a) $z_0 = 1$ y $z_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$

   (b) $z_0 = -\mathrm{i}$ y $z_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\mathrm{i}}{2}$

   (c) $z_k = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm \mathrm{i})$, $k = 0, \ldots, 3$

(d) $z_{0,1} = \pm\sqrt{2}\mathrm{i}$ y $z_k = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} \pm \mathrm{i}\right)$, $k = 2, \ldots, 5$

(e) $z_{0,1} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1} - \sqrt{\sqrt{2}-1}\mathrm{i}\right)$

(f) $z_{0,1} = \pm(2 + \mathrm{i})$

(g) $z_k = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{(8k+3)\pi}{12}$, $k = 0, 1, 2$

(h) $z_k = \sqrt[5]{5}\,\mathrm{cis}\,\frac{(2k+1)\pi - \arctan(3/4)}{5}$, $k = 0, \ldots, 4$

8. $z_k = \mathrm{cis}\,\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ y $z_n = 0$

13. $z_k = \alpha\,\mathrm{cis}\,\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

14. $z_3 = z_2 + (z_2 - z_1)\,\mathrm{cis}\,\frac{\pm 2\pi}{n}$

15. $a = 2 - 3\mathrm{i}$ y $b = 1 + 5\mathrm{i}$.

16a. Por ejemplo, $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j} = \overline{j} = 1/\mathrm{j}$.

17. $\alpha = (a + b\mathrm{i})/2$.

22. (a) La familia de rectas $u = 1/a$.

(b) La familia de rectas $v = -1/b$.

(c) La familia de circunferencias $b(u^2 + v^2) + u + v = 0$, tangentes en el origen de coordenadas a la recta $u + v = 0$ (para $b \neq 0$) y dicha recta (cuando $b = 0$).

(d) La familia de rectas $v = -ku$.

(e) La familia de circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y por $w_0 = 1/z_0$, además de la recta que pasa por dichos puntos.

(f) La *cisoide de Diocles* $u^2 = -\frac{v^2}{v^2+1}$.

(g) El semiplano $\mathrm{Re}(w) \geq 1/2$.

(h) El sector $\pi/6 \leq \arg(w) \leq \pi/3$, $|w| \geq 1/R > 1$.

23a. Si ponemos $w_1 = z + \frac{d}{c}$ (traslación), $w_2 = \frac{1}{z}$ (inversión), $w_3 = -\frac{ad - bc}{c^2}z$ (homotecia y/o rotación) y $w_4 = z + \frac{a}{c}$ (otra traslación), entonces $w = f(z) = (w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1)(z)$.

24c. $f(z) = \mathrm{cis}(\pi/4)\frac{1+z^2}{1-z^2}$

25. $f(\Omega) = \{\ w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\ \}$, recorrida dos veces.

26. $f(\Omega) = \{\ w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(w) \geq 0\ \}$

27. $f(|z| = 1)$ es el segmento $|u \leq 1|$, mientras que $f(|z| = 2)$ es la elipse $24u^2 + 40v^2 = 15$.

32. En este ejercicio, como ya se sabe, k representa cualquier número entero.

(a) $\cos 2 \cosh 1 - \mathrm{i} \,\mathrm{sen}\, 2 \,\mathrm{senh}\, 1$

(b) $\frac{\mathrm{sen}\, 4 - \mathrm{i}\,\mathrm{senh}\, 2}{\cos^2 2 + \mathrm{senh}^2 1}$

(c) $\frac{40 + 9\mathrm{i}}{41}$

(d) $(2k + 1/4)\mathrm{i}\pi$

(f) $\frac{1}{2}\,\mathrm{lgn}\, 13 + \left(2k\pi - \arctan\frac{3}{2}\right)\mathrm{i}$

(h) $\mathrm{e}^{(2k+1/4)\pi}\,\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$

(i) $-2\,\mathrm{e}^{2k\pi}\,\mathrm{senh}(\pi/2)$

(j) $-5\,\mathrm{e}^{\alpha+(2k+1)\pi}\,\mathrm{cis}\,(\mathrm{lgn}\, 5 - \alpha)$, donde $\alpha = \arctan(4/3)$.

36. (a,b,d,f) Para $z \neq \pm 1$ y (c,e) para $z \neq \pm\mathrm{i}$.